SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

S. GRAFFI

PERTURBAZIONI SINGOLARI DI AUTOVALORI IN ALCUNE CLASSI DI OPERATORI DI SCHRÖDINGER

25 NOVEMBRE - 2 DICEMBRE 1982

1. INTRODUZIONE

Gli esempi standard di applicazione formale della teoria delle perturbazioni degli operatori lineari che si trovano esposti in tutti i libri di meccanica quantistica sono i seguenti:

(0.1) L'oscillatore anarmonico: $H(g) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + gx^4$, $x \in R$, $g > 0$, perturbazione di $H(o) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, l'oscillatore armonico (prototipo di $-\Delta + |x|^2 + g\,P_{2m}(x)$, $x = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$, P_{2m} polinomio ellittico di ordine 2m).

(0.2) L'effetto Zeeman: $H(g) = -\Delta - |x|^{-1} + g(x_1^2 + x_2^2)$, $x \in R^3$, perturbazione di $H(o) = -\Delta - |x|^{-1}$, l'atomo idrogenoide, (prototipo di $\sum_{i=1}^{N} \Delta_i - \sum_{i=1}^{N} r_i^{-1} + \sum_{i<k=1}^{N} r_{ik}^{-1} + g \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + y_i^2)$, $r_i = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{1/2}$, $r_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^{2\ 1/2}$, effetto Zeeman per un sistema atomico qualsiasi).

(0.3) L'effetto Stark: $H(g) = -\Delta - |x|^{-1} + gx_1$, $x \in R^3$, perturbazione ancora dell'atomo di idrogeno (prototipo di $-\sum_{i=1}^{N} \Delta_i - \sum_{i=1}^{N} r_i^{-1} + \sum_{i<k=1}^{N} r_{ik}^{-1} + g \sum_{i=1}^{N} x_i$, effetto Stark per un sistema atomico qualsiasi).

In tutti e tre i casi si vuole risolvere il problema spettrale per l'equazione di Schrödinger stazionaria:

$$H(g)\ \psi(g) = E(g)\ \psi(g)$$

che si cerca di esaminare, almeno per g piccolo, alla luce della teoria delle perturbazioni degli operatori lineari essendo per ipotesi nota la decomposizione spettrale di H(o).

E' bene ricordare a tale proposito che i principi della meccanica quantistica affermano che i valori possibili dell'energia di un sistema autonomo sono tutti e solo i valori assunti dallo spettro del corrispondente operatore di Schrödinger, nel nostro caso H(g). A sua volta H(g) si scrive, formalmente, a partire dalla funzione Hamiltoniana del corrispondente moto classico, qualora essa sia esprimibile in termine delle coordinate cartesiane, tramite la sostituzione $p_i \to -i\frac{\partial}{\partial x_i}$, dove p_i è l'impulso Hamiltoniano canonicamente coniugato alla coordinata x_i. Si noti che prendiamo $h = 1$, tutte le masse uguali a $\frac{1}{2}$ e tutte le cariche uguali a 1. Pertanto (0.1) deriva dalla funzione Hamiltoniana $p^2 + x^2 + g\,x^4$ che descrive il moto rettilineo di un punto sotto l'azione del potenziale anarmonico $x^2 + g\,x^4$, (0.2) dalla Hamiltoniana $(\vec{p} + \vec{A})^2 - |x|^{-1}$, $\vec{A} = \vec{B} \wedge \vec{x}$, $B = (o,o,B\,x_3)$, $g = B^2$, che descrive il moto di una carica nel campo Coulombiano $-|x|^{-1}$ sotto l'azione di un campo magnetico esterno uniforme diretto lungo l'asse x_3; (0.3) dalla Hamiltoniana $\vec{p}^2 + g\,x_1 - |x|^{-1}$ che descrive il moto della medesima carica stavolta sotto l'azione di un campo elettrico esterno uniforme diretto lungo l'asse x_1. Il parametro g misura quindi l'intensità di anarmonicità nel caso (0.1), l'intensità del campo magnetico esterno nel caso (0.2), e l'intensità del campo elettrico esterno nel caso (0.3).

Nel seguito cercheremo di dimostrare come la teoria delle perturbazioni degli operatori lineari fornisca una descrizione sostanzialmente completa della modificazione dello spettro di H(g) quando g varia da 0 per assumere valori piccoli in un senso che verrà precisato.

Bibliografia. Per la teoria generale delle perturbazioni degli operatori lineari, si veda ovviamente T. Kato (1).

Una presentazione più succinta della teoria generale è quella di M. Reed e B. Simon (2) che però è specificamente orientata verso la teoria degli operatori di Schrödinger, di cui dà una trattazione assai dettagliata e pressoché completa fino al 1978, anno di uscita dei volumi 3 e 4. In particolare i paragrafi XII.3 e XII.4 contengono praticamente tutto quanto verrà esposto sul problema (0.1). Rassegne generali dei risultati ottenuti di recente sui problemi (0.2) e (0.3) sono contenute in [3], [4], [5].

Notazioni. Se H è uno spazio di Hilbert complesso, e $u, v \in H$, denoterò con $< u,v >$ il loro prodotto scalare, e con $u = < u,u >^{1/2}$ la norma. $L(H)$ denota l'insieme degli operatori lineari in H, e $B(H) \subset L(H)$ l'insieme degli operatori lineari continui in H. Per $T \in L(H)$, indicherò con $D(T)$ il suo dominio, con $Ran(T)$ il suo codominio, con $\|\cdot\|_T$ la sua norma del grafico, e con $H_T = \{D(T); \|\cdot\|_T\}$ lo spazio di Hilbert ottenuto completando $D(T)$ rispetto alla norma del grafico. Indicherò con $R(z,T) = (T-z)^{-1}$ il risolvente di T, $z \in \mathbb{C}$, con $\rho(T)$ l'insieme risolvente di T, con $\sigma(T)$ lo spettro di T, con $\sigma_p(T)$ il suo spettro puntuale, con $\sigma_{ess}(T)$ il suo spettro essenziale, e con $W(T)$ il suo range numerico, definito da $W(T) = \{z \in \mathbb{C} : z = < Tu, u > | u \in D(T), \|u\| = 1\}$. Con H^m, $m \in R$, indicherò infine gli spazi di Sobolev Hilbertiani $H^{m,2}(R^n)$. Il valore di m sarà di volta in volta evidente.

1. RICHIAMI SULLE PERTURBAZIONI REGOLARI DEGLI AUTOVALORI

E' bene premettere le nozioni fondamentali della teoria delle perturbazioni nel caso regolare, dovuta a Rellich e Kato, cosa che faremo nel caso più semplice possibile.

Sia $T_0 \in L(H)$ chiuso, $V \in L(H)$, $D(V) \supset D(T_0)$.

Definizione 1.1. V si dice relativamente limitato rispetto a T_0 se V è limitato da H_{T_0} a H, cioè se $\exists c > 0$ tale che

$$(1.1) \qquad \|Vu\| \leq c\|u\|_{T_0} \equiv c[\|u\| + \|T_0 u\|], \quad u \in D(T_0)$$

o, equivalentemente, se esistono $a > 0$, $b > 0$ tali che

$$\|Vu\| \leq b\|T_0 u\| + a\|u\|, \qquad u \in D(T_0)$$

Teorema 1.2 (Rellich-Kato). Sia $T_0 \in L(H)$ chiuso, e V relativamente limitato rispetto a T_0. Sia $g \in C$, e sia $T(g)$: $\mathbb{C} \to L(H)$, $T(g) = T_0 + gV$, definita su $D(T_0)$. Allora:

1) $\exists \overline{g} > 0$ tale che $T(g)$ è chiuso per $|g| \leq \overline{g}$.
2) Sia $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ un autovalore isolato di T_0 di molteplicità (algebrica) $m < +\infty$. Allora λ_0 è stabile per g sufficientemente piccolo, cioè dato $\delta > 0$ $\exists g_1(\delta) > 0$ tale che per $|g| \leq g_1(\delta)$ $T(g)$ ha esattamente m autovalori $\lambda_i(g)$ (contati secondo la loro molteplicità algebrica) interni a $\{z: |z - \lambda_0| = \delta\}$, e $\lim_{g \to 0} \lambda_i(g) = \lambda_0$.
3) Sia $m = 1$. Allora $\overline{g}_2 > 0$ tale che $\lambda(g)$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale l'origine e raggio di convergenza $\overline{g}_2$, e pertanto $\lambda(g)$ è una funzione olomorfa di g almeno per $|g| < \overline{g}_2$.

Dimostrazione. Sia $u \in D(T_0)$. Si ha, per (1.1):

$$\|T(g)u\| \leq \|T_0 u\| + |g|\|Vu\| \leq \|T_0 u\| + |g|\, c[\|T_0 u\| + \|u\|] =$$
$$= (1 + |g|\, c)\, \|T_0 u\| + |g|\, c\, \|u\|$$

$$\|T(g)u\| \geq \|T_0 u\| - |g|\, \|Vu\| \geq (1 - |g|\, c)\, \|T_0 u\| - |g|\, c\, \|u\|$$

Da queste due stime segue immediatamente che esistono $\overline{g} > 0$ e due costanti $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, indipendenti da $g \in [o,\overline{g}]$, tali che:

$$c_1 \,[\|u\| + \|T_0 u\|] \leq \|T(g)u\| + \|u\| \leq c_2\,[\|T_0 u\| + \|u\|], \quad |g| \leq \overline{g}$$

$\|\cdot\|_{T(g)}$ e $\|\cdot\|_{T_0}$ sono così equivalenti, e quindi $T(g)$ è chiuso se e solo se T_0 lo è.

(2) Sia d la distanza d'isolamento di λ_0, definita da $d = \mathrm{dist}(\lambda_0, \sigma(T_0)\setminus\{\lambda_0\})$, positiva per ipotesi. Sia Γ_δ la circonferenza $\{z: |z - \lambda_0| = \delta;\ \delta < d\}$. Per ipotesi $\mathrm{Ran}(T_0 - z) = H \quad \forall z \in \Gamma_\delta$ e $\exists K > 0$ tale che $\sup\limits_{z\in\Gamma_\delta} R(z,T_0) < K$. Dato che $(T_0 - z) : D(T_0) \xleftrightarrow[\text{su}]{1-1} H$, per (1.1) si ha:

$$\|V(T_0 - z)^{-1} v\| \leq c\,[\|(T_0 - z)^{-1} v\| + \|T_0(T_0 - z)^{-1} v\|], \text{ da cui:}$$

$$\sup_{z\in\Gamma_\delta} \|V(T_0 - z)^{-1} v\| \leq c[K\|v\| + \|v + z(T_0 - z)^{-1} v\|] \leq$$

$$\leq c(K + 1 + K(|\lambda_0| + \delta)\,\|v\|)\ , \quad \forall v \in H$$

Si vede dunque che $\overline{g}_0 > 0$ tale che

$$\sup_{z\in\Gamma_\delta} \|g\, V(T_0 - z)^{-1}\| < 1\ , \qquad |g| < \overline{g}_0\ . \tag{1.3}$$

Consideriamo ora l'identità $T(g) - z = (T_0 + g\,V - z) = (I + g\,V(T_0 - z)^{-1})\,(T_0 - z)$, banalmente vera per $z \notin \sigma(T_0)$. Se $|g| < \overline{g}_0$, $(I + g\,V(T_0 - z)^{-1})^{-1} \in B(H)$, con norma limitata uniformemente su $z \in \Gamma_\delta$, perché somma della serie geometrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n g^n [V(T_0 - z)^{-1}]^n$, convergente in $B(H)$ uniformemente rispetto a $z \in \Gamma_\delta$ in virtù di (1.3). Esiste pertanto $K_1 > 0$ tale che

$$(1.4) \qquad \sup_{z \in \Gamma_\delta} \|(T(g) - z)^{-1}\| < K_1 .$$

Osserviamo ora che

$$(1.5) \qquad \lim_{g \to 0} \sup_{z \in \Gamma_\delta} \|R(z, T(g)) - R(z, T_0)\| = 0 .$$

Infatti, dato che $D(T(g)) = D(T_0)$, vale l'identità

$$R(z,T(g)) - R(z,T_0) = g\, R(z,T(g))\, V\, R(z,T_0), \quad \text{da cui}$$

$$\sup_{z \in \Gamma_\delta} \|R(z,T(g)) - R(z,T_0)\| \leq |g|\, K_1 (K + 1 + K(|\lambda_0| + \delta)) \to 0 \text{ per } g \to 0.$$

Per (1.4), possiamò definire:

$$(1.6) \qquad P(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} R(z,T(g))\, dz , \quad |g| < \bar{g}_0$$

E' ben noto ([1], p. 178) che (1.6), intesa nel senso di integrale forte di Riemann, definisce un proiettore: $P \in B(H)$, $P^2 = P$. Per (1.5), $\lim_{g \to 0} \|P(g) - P(o)\| = 0$. Pertanto ([1], p. 58) $\exists g_1(\delta) > 0$ tale che, per $|g| \leq g_1(\delta)$, dim Ran $P(g)$ = dim Ran $P(o)$. Poiché dim Ran $P(o) = m$ per ipotesi, $T(g)$ ha esattamente m autovalori $\lambda_i(g)$ (contati secondo la loro molteplicità algebrica) entro Γ_δ, e $\lim_{g \to 0} \lambda_i(g) = \lambda_0$ perché $\delta < d$ è arbitrario.

(3) Se $m = 1$ le molteplicità algebrica e geometrica coincidono, e $P(g)u$ è autovettore $\forall u \in H$: $(T(g) - \lambda(g))\, P(g)u = P(g)u$, quindi:

$$(1.7) \qquad \lambda(g) = \langle T(g)\, P(g)u, P(g)u \rangle / \|P(g)u\|^2$$

Scegliamo ora per comodità $u = u_0 = P(o)u$: $(T_0 - \lambda_0)\, u_0 = 0$, e $\delta = \frac{d}{2}$, ponendo $\Gamma_{d/2} = \Gamma$. Allora:

$$(1.8)\qquad P(g)u_o = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (T(g)-z)^{-1}\, u_o\, dz = $$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} (-g)^n \int_\Gamma (T_o - z)^{-1}\,(V(T_o - z)^{-1})^n\, u_o\, dz$$

l'inversione della serie con l'integrale essendo lecita per $|g| < \overline{g}_o$ in virtù di (1.3). Da ciò segue facilmente che $\|P(g)\, u_o\|^2$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0, e si noti che possiamo sempre assumere $\|P(0)\, u_o\|^2 = \|u_o\|^2 = 1$. Allo stesso modo si procede per il numeratore di (1.7). $\lambda(g)$ risulta così espresso dal quoziente di due funzioni olomorfe in un intorno di $g = 0$, di cui la seconda non nulla, e pertanto $\exists\, \overline{g}_2 > 0$ tale che $\lambda(g)$ è olomorfa almeno per $|g| < \overline{g}_2$. Ciò prova il Teorema.

<u>Osservazione</u>. Lo sviluppo in serie di Taylor di $\lambda(g)$ attorno a $g = 0$ ha, per (1.7) e (1.8), la forma:

$$(1.9)\qquad \lambda(g) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} B_n g^n = \sum_{n=0}^{\infty} E_n g^n, \quad E_o = \lambda_o$$

ed è in linea di principio calcolabile poiché $(T_o - z)^{-1}$, u_o, λ_o sono da considerare noti. La (1.9), dove i B_n sono dati da (1.8) e gli A_n dalla sua analoga, prende il nome di serie delle perturbazioni di Rayleigh--Schrödinger.

Sostanzialmente con lo stesso ragionamento si può dare la seguente versione astratta del Teor. 1.2, che sarà ampiamente utilizzata in seguito. Per la dimostrazione, si veda ([1], VII.1).

<u>Definizione 1.3</u>. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. La funzione $T(g)$: $\Omega \to L(H)$ si dice famiglia olomorfa (di tipo A) di operatori in H, nel senso di Kato, se:

(1) $T(g)$ è chiuso $\forall\, g \in \Omega$, e $D(T(g)) \equiv D$ non dipende da g.

(2) $\rho(T(g)) \neq \emptyset \quad \forall\, g \in \Omega$.

(3) La funzione $T(g)u\colon \Omega \to H$ è olomorfa $\forall u \in D$.

Teorema 1.4. Sia $T(g)\colon \Omega \to L(H)$ una famiglia olomorfa di tipo A. Sia $g_0 \in \Omega$, e sia $\lambda(g_0)$ un autovalore isolato di molteplicità (algebrica) $m < +\infty$ di $T(g_0)$. Allora esiste un intorno di g_0 per cui valgono le stesse conclusioni del Teor. 1.2.

Osservazioni

(1) La limitazione a $m = 1$ nell'affermazione (3) del Teor. 1.2 non è essenziale. Per $m > 1$ $P(g)$ è una matrice $m \times m$; gli autovalori $\lambda_i(g)$ possono così avere singolarità di tipo algebrico a 0, e sono in generale sviluppabili in serie di Puiseux. Si veda ([1], pp. 93-96).

(2) Nessuno degli esempi (0.1), (0.2), (0.3) rientra nelle ipotesi del Teorema 1.2. Anzi l'ironia del caso vuole che in tutti e tre questi esempi famosi la serie delle perturbazioni, pur esistendo termine a termine, abbia raggio di convergenza nullo.

(3) L'insieme degli operatori di Schrödinger di concreto interesse fisico a cui il Teor. 1.2 può essere applicato è tuttavia sorprendentemente non vuoto. L'esempio più conosciuto è la cosiddetta serie isoelettronica dell'elio:

$$T(g) = -\Delta_{x_1} - \Delta_{x_2} - |x_1|^{-1} - |x_2|^{-1} + g|x_1 - x_2|^{-1}, \quad x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

che agisce su $L^2(\mathbb{R}^6)$ ($g = Z^{-1}$, Z = numero atomico, la massa del nucleo è assunta infinita, e si trascurano spin, effetti relativistici, ecc.). Qui $T_0 = -\Delta_{x_1} - \Delta_{x_2} - |x_1|^{-1} - |x_2|^{-1}$ che è autoaggiunto in $L^2(\mathbb{R}^6)$ se definito su H^2, e la moltiplicazione per $V = |x_1 - x_2|^{-1}$ è limitata da H^2 in L^2 (per una trattazione dettagliata, si veda ([1], p. 432)).

2. L'OSCILLATORE ANARMONICO: UNA PERTURBAZIONE SINGOLARE CHE LASCIA GLI AUTOVALORI STABILI

Nei tre casi che esamineremo la teoria delle perturbazioni non è regolare. Tuttavia la serie (1.9) esiste a ogni ordine, cioè E_n esiste $\forall n$, ed è calcolabile (numericamente) fino a valori di n dell'ordine di 100. In fisica si ha motivo di accettare senz'altro che, per valori piccoli di g, pochi termini di tale serie diano una buona approssimazione dell'autovalore perturbato, di cui si assume pacificamente l'esistenza. Si vedrà che questo atteggiamento è sostanzialmente corretto anche dal punto di vista matematico nonostante che, specialmente nel caso (0.3), non siano poche le sottigliezze da superare.

L'intuizione fisica ci dice dunque che gli autovalori si devono mantenere stabili sotto l'azione delle perturbazioni, e che la serie di Rayleigh-Schrödinger deve per lo meno rappresentare uno sviluppo asintotico degli autovalori perturbati per $g \to 0$. Proveremo in realtà delle affermazioni più forti, e cioè non solo la stabilità degli autovalori perturbati, ma anche il fatto che essi sono univocamente determinati dalla serie. A questo scopo faremo vedere che autovalori e serie soddisfano le condizioni del corollario ad un ben noto teorema di Carleman che sarà qui sufficiente enunciare così:

Teorema 2.1 (Carleman). Sia F(g) olomorfa in $\Omega = \{g \in \mathbb{C}: 0 < |g| < R;\ |\arg g| < \frac{1}{2}\pi + \varepsilon\ ,\ \ \varepsilon > 0\}$, continua in $\overline{\Omega}$. Supponiamo che $\exists\ A > 0$ tale che

$$|F(g)| \leq A^{n+1}\, n!\, |g|^n\ , \qquad n = 0,1,2,\dots$$

$g \in \overline{\Omega}$. Allora $F(g) \equiv 0$.

Corollario 2.2. Sia $F(g)$ olomorfa in Ω e continua in $\bar{\Omega}$ come sopra, e sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n$ una serie di potenze formale. Supponiamo:

(1) $F(g)$ ammette $\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n$ come sviluppo asintotico in $\bar{\Omega}$

$$(2.1) \qquad \lim_{|g|\to 0, g\in\bar{\Omega}} \frac{1}{|g|^N} |R_N(g)| = a_N, R_N(g) = F(g) - \sum_{n=0}^{N-1} a_N g^n, \; N = 1,2,\ldots$$

(2) (2.2) $\exists\, A > 0$ tale che $|R_N(g)| < A^{N+1}\, N!\, |g|^N$, $N = 0,1,2,\ldots$, $g \in \bar{\Omega}$

Allora se $G(g)$ soddisfa le medesime condizioni $F \equiv G$.

Teorema 2.3 (Watson-Nevanlinna). Sia $F(g)$ olomorfa nel settore $\Omega_\alpha = \{g: 0 < |g| < R| \,|\arg g| < \frac{\pi}{\alpha} + \alpha|\; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\}$, continua in $\bar{\Omega}_\alpha$. Data la serie formale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n$, supponiamo che $F(g)$ e la serie soddisfino le condizioni del Cor. 1.2 dove si intende Ω_α al posto di Ω. Allora la serie è sommabile secondo Borel a $F(g)$ in $\{g: |g| < R \mid |\arg g| < \alpha\}$. Ciò significa che la funzione $f_B(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} g^n$, olomorfa per $|g| < A$ in virtù di (2.2), ammette prolungamento analitico uniforme al settore $|\arg g| < \alpha$ tale che l'integrale $\int_0^\infty e^{-t} f_B(g\,t)\, dt$ risulta assolutamente convergente per $|g| < R$, $|\arg g| < \alpha$ e coincide ivi con $F(g)$.

Osservazione. I risultati precedenti hanno estensione al caso di divergenze più rapide della serie formale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n$, ammettendo l'analiticità di $F(g)$ in un settore più vasto. Essenzialmente, se $a_n = O((n!)^m)$ per $n \to \infty$, $m > 1$, si ha unicità qualora $F(g)$ sia analitica in $\Omega_m =$ $= \{g: |0 < |g| < R| \; |\arg g| < \frac{m\pi}{2}\}$, continua in $\bar{\Omega}_m$, e ivi soddisfacente (2.1), (2.2) con $\Gamma(m\,N + 1)$ al posto di $N!$ in (2.2), e sommabilità di Borel in $|g| < R$, $|\arg g| < \alpha$ qualora le condizioni precedenti valgano in $|\arg g| < \frac{m\pi}{2} + \alpha$. Si noti che per $m > 2$ Ω_m sta sulla superficie di Riemann naturale. Per la dimostrazione di quanto precede, si veda ad esempio Reed-Simon, XII.4, XII.5.

Esaminiamo ora il caso di $T(g) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + g\,x^4$ in $L^2(\mathbb{R})$. Ricordiamo anzitutto che $T(o) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ (si veda ad es. [6]) definito su $H^2 \cap D(x^2) = H^2 \cap L_2^2$ è autoaggiunto, ha risolvente compatto, e $\sigma(T(o)) = \{2i + 1\}_{i=0}^{\infty}$, ogni autovalore $\lambda_i(o) = 2i + 1$ è semplice, e l'autovettore corrispondente normalizzato è $\psi_i = c_i\, e^{-x^2/2}\, H_i(x)$, dove $H_i(x)$ è l'i-esimo polinomio di Hermite e c_i è la costante che fissa $\|\psi_i\| = 1$.

Richiamiamo ora alcuni risultati noti su $T(g)$ per $g > 0$. Per la dimostrazione, si veda Reed-Simon (2), X.I e XII.3.4.

Teorema 2.4. Sia $T(g)$, $g > 0$, la famiglia di operatori in L^2 definita dall'espressione differenziale $-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + g\,x^4$ su $D(T(g)) = H^2 \cap L_4^2$. Allora $T(g)$ è autoaggiunto, strettamente positivo, ha risolvente compatto e possiede un'infinità numerabile di autovalori $0 < \lambda_0(g) < \lambda_1(g) < \ldots \lambda_i(g) \underset{i \to \infty}{\uparrow} +\infty$.

Osservazione. $g\,x^4$ non è una perturbazione regolare di $T(o)$ per nessun valore di g, poiché $D(x^4) \not\subset D(T(o))$. Per di più $T(g)$ non è essenzialmente autoaggiunto per $g < 0$: è simmetrico con indici di difetto $(2,2)$. Non c'è quindi da attendersi che $\lambda_i(g)$ sia analitica a $g = 0$.

Volendo verificare nel caso in esame le condizioni di 2.2 e 2.3 sugli autovalori e la serie formale delle perturbazioni dobbiamo poter considerare i $\lambda_i(g)$ come funzioni di g intesa come variabile complessa. Pertanto dovremo determinare le proprietà spettrali di $T(g)$ per g complesso, e verificare la stabilità degli autovalori di $T(o)$ per g piccolo in un settore di apertura almeno π attorno a $g > 0$. E' bene notare che, anche per g reale e positivo, anche quando la perturbazione è un polinomio di ordine pari che non introduce spettro essenziale, in generale la stabilità non è un fatto banale, come mostra il caso seguente:

Esempio 2.5 (la doppia buca). Sia $T(g) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 2gx^3 + g^2x^4$,

$D(T(g)) = H^2 \cap L^2_4$, $g > 0$. Allora $T(g) = T(g)^*$, ha risolvente compatto e infiniti autovalori positivi che si accumulano a $+\infty$ $\forall g \geq 0$, ma gli autovalori $\lambda_i(o)$ non sono stabili per $g > 0$ perché $\dim P(g) = 2$ per g piccolo. Per la dimostrazione si veda [2], XIII.4. L'instabilità ha un motivo fisicamente ovvio (si veda ad es. Landau-Lifshitz (7)).

Volendo ora realizzare $T(g)$ per g complesso per ragioni che appariranno subito chiare conviene considerare una famiglia a due parametri in $L(L^2)$.

Teorema 2.6. Siano $(\alpha,g) \in ₵ \times ₵$, $|\arg g| < \pi$, e sia $T(\alpha,g) \in L(L^2)$ definita da $-\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x^2 + g x^4$ con $D(T(\alpha,g)) = H^2 \cap L^2_4$. Allora $T(\alpha,g)$ è una famiglia olomorfa di tipo A, $\forall \alpha \in ₵$ per g fisso, $\forall g$ in $|\arg g| < \pi$ per α fisso, di operatori in L^2 con risolventi compatti.

Dimostrazione. E' ben noto (e, comunque, immediatamente verificabile) che $T(o,g) = -\frac{d^2}{dx^2} + g x^4$ è chiuso e ha risolvente compatto (si ricordi che $|\arg g| < \pi$). Esistono pertanto $a(g) > 0$, $b(g) > 0$ tali che, $\forall u \in H^2 \cap L^2_4$: $\| -\frac{d^2}{dx^2} u \| + \| x^4 u \| \leq b \| (-\frac{d^2}{dx^2} + g x^4) u \| + a \| u \|$.

Inoltre dato $\beta > 0$ $\exists B(\beta) > 0$ tale che $x^2 \leq \beta x^4 + B(\beta)$, da cui: $\| x^2 u \| \leq \beta \| x^4 u \| + B(\beta)\ u \leq \beta\, b \| (-\frac{d^2}{dx^2} + g x^4) u \| + (a + B(\beta)) \| u \|$, $\| \alpha x^2 u \| \leq |\alpha|\ \beta\ b \| (-\frac{d^2}{dx^2} + g x^4) u \| + |\alpha| (a + B(\beta)) \| u \|$. Ora $\forall \alpha \in ₵$ $\exists \beta$ tale che $|\alpha|\ \beta\ b < 1$. Ragionando come nel Teor. 1.2, si conclude che $T(\alpha,g)$ è chiuso $\forall \alpha \in ₵$ e che si può trovare $z \in ₵$ tale che $\| \alpha x^2 (T(o,g)-z)^{-1} \| < 1$ $\forall \alpha \in ₵$ poiché ([1], p. 268) $\| (T(o,g)-z)^{-1} \| \leq \operatorname{dist}(z, W(T(o,g)))^{-1}$. Pertanto, procedendo come nel Teor. 1.2, parte (2), si ottiene l'identità $(T(\alpha,g)-z)^{-1} = (T(o,g)-z)^{-1} (1 + \alpha x^2 (T(o,g)-z)^{-1})^{-1}$ che implica la compattezza di $R(z,T(\alpha,g))$ esprimendolo come prodotto del compatto $R(z,T(o,g))$ per il limitato $(1 + \alpha x^2 R(z,T(o,g)))^{-1}$. Poiché se $R(z,T)$ è compatto per un $z \in ₵$ lo è $\forall z \in ₵$ ([1], p. 187), e poiché inoltre la funzione

$T(\alpha,g)u: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to L^2$ è olomorfa $\forall u \in H^2 \cap L^2_4$, l'affermazione è provata.

La chiave di volta della nostra analisi tanto in questo caso che in quello, assai più sottile, dell'effetto Stark, è costituita dal seguente

Teorema 2.7. Sia $\theta \in R$, e $U(\theta): L^2 \leftrightarrow L^2$ la dilatazione unitaria $(U(\theta) f)(x) = e^{\theta/2} f(e^{\theta}x)$, $f \in L^2$. Allora:

(1) $T(\alpha,g,\theta) \equiv U(\theta)\, T(\alpha,g)\, U(\theta)^{-1}$, l'immagine unitaria di $T(\alpha,g)$, è data da $T(\alpha,g,\theta) = e^{-\theta}\, T(\alpha\, e^{2\theta}, g\, e^{3\theta})$.

(2) $T(\alpha,g,\theta)$ ammette prolungamento come famiglia olomorfa (di tipo A), con risolventi compatti, per tutti i θ complessi tali che $|\arg(g\, e^{3\theta})| < \pi$, (α,g) fissi.

(3) Gli autovalori di $T(\alpha,g,\theta)$ non dipendono da θ e coincidono pertanto con gli autovalori di $T(\alpha,g)$.

Dimostrazione. (1) e (2) sono una conseguenza immediata delle proprietà di omogeneità di $T(\alpha,\beta)$ e del Teor 2.6. Si osservi ora che per il Teor. 1.4 gli autovalori di $T(\alpha,\beta,\theta)$ sono funzioni localmente olomorfe di θ per (α,g) fissato. Ora se $\theta_0 \in R$, si ha ovviamente che $T(\alpha,g,\theta+\theta_0)$ e $T(\alpha,g,\theta)$ sono unitariamente equivalenti. Pertanto $\lambda_i(\alpha,g,\theta)$ dipende solo da $\mathrm{Im}\theta$ ed è quindi costante $\forall i$, il che prova l'asserto.

Se $\alpha = 1$, prendendo $e^{\theta} = g^{-1/3}$ si ha immediatamente:

Corollario 2.8. $\lambda_i(1,g) = g^{1/3}\, \lambda_i(g^{-2/3},1)$, $i = 0,1,\ldots$ (2.3)

Gli autovalori $\lambda_i(g)$ sono ovviamente in questa notazione i $\lambda_i(1,g)$ che, considerati come funzione della variabile complessa g, per (2.3) ammettono a priori una superficie di Riemann a tre sheets, convenendo al solito di porre il taglio lungo l'asse reale negativo. Il problema è determinare se su questa superficie di Riemann esistono percorsi di continuazione analitica. Il Teor. 1.2 e il Corollario 2.8 affermano che tali percorsi esi stono sempre per $|g|$ grande e che dopo tre giri si ritorna al valore iniziale (si veda Simon (9) per maggiori dettagli), ma qui si vuole determinare l'analiticità in un settore di vertice lo zero attorno all'asse reale positivo.

A tale scopo conviene utilizzare la dilatazione per fissare a zero la fase del termine perturbante: sia $e^{3\theta} = e^{-i \arg g}$, cioè $\mathrm{Re}\,\theta = 0$, $\mathrm{Im}\,\theta = -\frac{1}{3}\arg g$. Pertanto, se $|\arg g| < \pi$: $\lambda_i(1,g) = e^{1/3\, i \arg g}\,\lambda_i(e^{-2/3\, i \arg g}, |g|)$, $\lambda_i(e^{-2/3\, i \arg g}, |g|)$ essendo ovviamente autovalore di $T(e^{-2/3\, i \arg g}, |g|)$. Si ha:

<u>Lemma 2.9</u>. Sia $\eta > 0$, $\phi = \arg g$, $|\phi| \leq \frac{3}{2}\pi - \eta$. Allora, se $z \notin \sigma(T(e^{-2/3\, i\, \phi}, 0))$:

$$\lim_{|g| \to 0} \| R(z, T(e^{-2/3\, i\, \phi}, |g|)) - R(z, T(e^{-2/3\, i\, \phi}, 0)) \| = 0 \tag{2.4}$$

uniformemente rispetto a ϕ.

<u>Dimostrazione</u> (cenno). Sia $\gamma = e^{-2/3\, i\, \phi}$, $|\arg \gamma| \leq \pi - \frac{2}{3}\eta$, $T(\gamma, o) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, $D(T(\gamma,o)) = H^2 \cap L^2_2$. $T(\gamma,o)$ è chiuso, ha risolvente compatto, e $\sigma(T(\gamma,o)) = \{\gamma^{1/2}(2i+1)\}_{i=0}^{\infty}$. E' facile vedere che $\exists\, a > 0$, $b > 0$ indipendenti da γ nei compatti di $\{\gamma : |\arg \gamma| \leq \pi - \eta\}$ tali che

$$\| x^2 u \| \leq b \| T(\gamma,o) u \| + b \| u \| , \qquad \forall u \in H^2 \cap L^2_2 . \tag{2.5}$$

Procedendo come nel Teor. 2.6 si vede che esistono $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ indipendenti da γ come sopra e da $|g| > 0$ tali che

$$\| x^2 u \| \leq b_1 \| T(\gamma, |g|) u \| + a_1 \| u \| , \qquad \forall u \in H^2 \cap L^2_4 . \tag{2.6}$$

Osserviamo ora che, in particolare, l'unione su $|g| > 0$ e $|\arg \gamma| \leq \pi - \eta$

di $W(T(\gamma,|g|))$ non contiene l'asse reale negativo: dunque se $z \notin R_-$, $\exists K > 0$ indipendente da $(|g|,\gamma)$ tale che $\| R(z,T(\gamma,|g|)\| < K$. Si noti poi che basta provare la (2.4) per un qualche $z \in C$ affinché, per la 1ª identità del risolvente, essa valga $\forall z \notin \sigma(T(\gamma,o))$. Dato che $H^2 \cap L^2_4 \subset H^2 \cap L^2_2$, vale l'identità:

$$R(z,T(\gamma,|g|) - R(z,T(\gamma,o) = |g| \; R(z,T(\gamma,o))x^2 x^2 R(z,T(\gamma,|g|)).$$

Per (2.5), (2.6) e il ragionamento del Teor. 1.2 si vede che $\exists K_1, K_2 > 0$ indipendenti da $(|g|,\gamma)$ tali che $\| x^2 R(z,T(\gamma,|g|))\| < K_1$, $\| R(z,T(\gamma,o))\, x^2 \| < K_2$. Pertanto $\| R(z,T(\gamma,o)) - R(z,T(\gamma,|g|))\| \le K_1 K_2 |g| \to 0$ per $|g| \to 0$ con le uniformità volute in $(\gamma,|g|)$, e ciò prova il Lemma.

<u>Teorema 2.10.</u>

(1) Gli autovalori $\lambda_i(o)$ di $T(g)|_{g=0} \equiv T(1,g)|_{g=0}$ sono stabili per $|g| > 0$ sufficientemente piccolo, $|\arg g| < \pi$.

(2) Siano ancora $\lambda_i(g) \equiv \lambda_i(1,g)$ gli autovalori di $T(1,g)$, ordinati in successione crescente per $g > 0$: allora per $i = 0,1,\ldots$, $\exists B(i) > 0$ tale che $\lambda_i(1,g)$ è analitica nel settore $\Omega_i = \{g\colon |g| < B(i) \mid |\arg g| < \frac{3}{2}\pi - \eta,\ \eta > 0\}$ sulla superficie di Riemann di $g^{1/3}$, e continua su $\bar{\Omega}_i$.

<u>Dimostrazione</u> (cenno). Definiamo la famiglia di proiettori:

$$P_\gamma(|g|) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-2i-1| = \frac{1}{2}} [\,T(\gamma,|g|) - z]^{-1}\, dz$$

Per il Lemma 2.9 e il ragionamento del Teor. 1.2 $\lim_{|g|\to 0} \| P_\gamma(|g|) - P_\gamma(o)\| = 0$ uniformemente su γ e quindi gli autovalori sono stabili. D'altra parte dato i $\exists$ B(i) > 0 tale che $\| P_\gamma(|g|) - P_\gamma(0)\| < 1$, $|g| < B(i)$; quindi, per un risultato ben noto, (si veda ad es. [2], XIII.2) la molteplicità di $\lambda_i(\gamma,|g|)$ è sempre 1 per $0 \leq |g| < B(i)$, $|\arg\gamma| < \pi - \frac{2}{3}\eta$; non c'è dunque alcun incrocio di autovalori ivi. Per il risultato generale di Kato (si veda [1], pp. 368-370, o Simon (9), II.1) $\lambda_i(\gamma,|g|)$ è dunque olomorfa in γ come sopra, e riesprimendo il risultato nella variabile g, abbiamo che $\lambda_i(1,g)$ è analitico in Ω_i e continuo in $\bar{\Omega}_i$.

Vediamo ora la sommabilità della serie delle perturbazioni, considerando senza perdere in generalità il caso i = 0, perché il ragionamento non dipende da i.

Osservazione 2.11. La serie delle perturbazioni $\sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n$ relativa all'autovalore $\lambda_0(o) = 1$ esiste, cioè $A_n < +\infty \ \forall n$.

Infatti, per quanto visto al n. 1, essendo $\psi_0 = \pi^{-1/2} e^{-x^2/2}$ l'autovettore di $\lambda_0(o) = 1$, $(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2)\psi_0 = \lambda_0\psi_0 = \psi_0$, basterà far vedere che esistono le serie formali per $\langle \psi_0, P_0(g)\psi_0 \rangle$ e $\langle \psi_0, T(g)P_0(g)\psi_0 \rangle = \langle \psi_0, T(o)P_0(g)\psi_0 \rangle + g\langle \psi_0, x^4 P_0(g)\psi_0 \rangle$.
Ora $P_0(g)\psi_0 = (2\pi i)^{-1}\int_{|z-1| = 1/2} (T(1,g) - z)^{-1}\psi_0 \, dz$ ma, formalmente: $[T(1,g) - z]^{-1} = (T(o) - z)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} x^4 [(T(o) - z)^{-1}]^n$. Il cerchio $\Gamma = |z - 1| = \frac{1}{2}$ è contenuto in $\rho(T(o))$, e $(T(o) - z)^{-1}\psi_n = (2n+1 - z)^{-1}\psi_n$.
Inoltre $\langle \psi_i, V\psi_k \rangle = 0$ se $|i-k| > 4$, $\psi_n = a_{n+4}\psi_{n+4} + \dots + a_{n-4}\psi_{n-4}$, da cui si vede chiaramente l'esistenza della serie formale eseguendo le integrazioni con il metodo dei residui. Pertanto si ha:

Teorema 2.12. Sia $|\arg g| < \pi - \eta$, $|g| < B(o)$. Allora l'autovalore $\lambda_0(g)$ e la sua serie delle perturbazioni $\sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n$ soddisfano le condizioni del Teor. 2.3.

Dimostrazione (cenno). E' noto, e facilmente dimostrabile, che se $u(g)$, $v(g)$ soddisfano le condizioni del Teor. 2.3 e $v(g) \neq 0$, anche il quoziente $\frac{u(g)}{v(g)}$ le soddisfa. Pertanto basta considerare il denominatore $< \psi_0, P_0(g)\, \psi_0 >$, e, dato lo sviluppo di $P_0(g)\, \psi_0$, basta stabilire la condizione (2) per $(T(g) - z)^{-1}\, \psi_0$, con limitazioni uniformi in z per $|z - 1| = \frac{1}{2}$, per $|g| < B(o)$, $|\arg g| \leq \pi - \eta$. Scriviamo pertanto lo sviluppo geometrico del risolvente all'ordine N tenendo il resto:

$$[T(g) - z]^{-1}\, \psi_0 - \sum_{n=0}^{N} (-g)^n\, (T(o) - z)^{-1}\, [V(T(o) - z)^{-1}]^n\, \psi_0 =$$

$$= (-g)^{N+1}\, (T(g) - z)^{-1}\, [V(T(o) - z)^{-1}]^{N+1}\, \psi_0$$

la cui validità può essere facilmente provata perché l'autovettore ψ_0 è in S. Poiché $\exists\, K > 0$ tale che (Lemma 2.9) $\sup_{z \in \Gamma} \|(T(g) - z)^{-1}\| < K$, basterà far vedere che $\exists\, c > 0$, $\sigma > 0$, indipendenti da (g,z), tali che $(\|\psi_0\| = 1)$

$$\|[V(T(o) - z)^{-1}]^{N+1}\, \psi_0\| \leq K c\, \sigma^{N+1} (N + 1)! \tag{2.6}$$

Se definiamo al modo solito gli operatori di creazione e distruzione (si veda ad es. [6])

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(- i \frac{d}{dx} + i\, x\right), \quad a = - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + i\, x\right) \tag{2.7}$$

si hanno le ben note proprietà (come identità su S)

$$\begin{gathered} [a, a^+] = i, \; T(o) = a^+ a + 1, \; x^4 = \frac{1}{4}(a^+ + a)^4 \\ a\, \psi_n = \sqrt{n}\, \psi_{n-1}, \quad a^+\, \psi_n = \sqrt{n+1}\, \psi_{n+1}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Pertanto la norma di $[V(T(o) - z)^{-1}]^{N+1}\, \psi_0$ sarà maggiorata dalla somma di $(2^4)^{N+1}$ termini del tipo

$$4^{-N-1} \| B_1 \ldots B_4 (T(o)-z)^{-1}\, B_5 \ldots B_8 (T(o)-z)^{-1} \ldots B_{4N+4} (T(o)-z)^{-1}\, \psi_0 \|$$

dove ogni B vale a oppure a^+, da cui segue facilmente la stima voluta.

La generalizzazione di tutti questi risultati al caso di $T(g) = -\Delta + |x|^2 + g\,P_{2m}(x)$, $x \in R^n$, $D(T(g)) = H^2(R^n) \cap L^2_{2m}(R^n)$, non offre alcuna ulteriore difficoltà concettuale.

3. STABILITA' SENZA CONTINUITA' IN NORMA DEL RISOLVENTE: L'EFFETTO ZEEMAN

Sia $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un potenziale. Denotiamo ancora con V l'operatore massimo di moltiplicazione per V(x) in $H = L^2(\mathbb{R}^3) \equiv L^2$, e con $L^2 + L^\infty_\varepsilon$ la seguente classe di potenziali:

$$\{V:\ V = V_1 + V_2\ |V_1 \in L^2|\ V_2 \in L^\infty : \|V_2\|_\infty < \varepsilon\}\ .$$

Ricordiamo ([1], p. 304) che la moltiplicazione per $V \in L^2 + L^\infty_\varepsilon$ è compatta come operatore da H^2 in L^2, e quindi, in particolare, limitata da H^2 in L^2 con sup relativo 0.

Cominciamo con l'enunciare un risultato standard per l'operatore di Schrödinger $-\Delta + V$. Per la dimostrazione, si veda Reed-Simon (2), Voll. III-IV, passim. (qui e nel seguito, dato $T \in L(H)$, denoteremo: $\sigma_d(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{ess}(T)$, e se $T = T^*$, $\sigma_{sc}(T)$ lo spettro singolare continuo, e $\sigma_{ac}(T)$ lo spettro assolutamente continuo di T).

<u>Teorema 3.1</u>. Sia $H_0 = -\Delta$, $D(H_0) = H^2(R^3)$, $V \in L^2 + L^\infty_\varepsilon$. Allora $D(V) / D(H_0)$, e se $T = H_0 + V$, $D(T) = D(H_0)$, si ha:

(1) T è autoaggiunto, $T = T^*$, e inferiormente limitato.

(2) $\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(H_0) = [0, +\infty)$; $\sigma_{sc}(T) = \emptyset$.

(3) $\sigma_d(T) \subset \inf[\sigma(T), 0[$, $\sigma_d(T)$ contiene un'infinità numerabile di autovalori se $\exists\, R > 0$ tale che $V(x) \leqq -|x|^{-2+\varepsilon}$ per $|x| > R$, $\varepsilon > 0$.

Consideriamo ora l'operatore dell'effetto Zeeman:

Lemma 3.2. Sia $g \in ¢$, $|\arg g| < \pi$. Sia $H_0(g)$: $¢ \setminus \mathbb{R}_- \to L(L^2)$ definita da $-\Delta + g(x_1^2 + x_2^2)$, $D(H_0(g)) = H^2 \cap D(x_1^2 + x_2^2)$, e sia $H_0(o) = H_0$. Allora:

(1) $H_0(g)$ è una famiglia olomorfa (di tipo A), e $H_0(g)^* = H_0(\overline{g})$.

(2) $\sigma_d(H_0(g)) = \emptyset$, $\sigma_{ess}(H_0(g)) = \{(2n+2)\sqrt{g}\}_0^\infty + [0, +\infty)$; se $g \in \mathbb{R}$, $\sigma_{ac}(H_0(g)) = \emptyset$. Qui $n = n_1 + n_2$, $n_1, n_2 = 0,1,\ldots$

(3) $W(H_0(g)) = \{z \in ¢ : 0 \leq \arg z \leq \arg g\}$.

Dimostrazione. Tutte le affermazioni seguono immediatamente dal fatto ovvio che $H_0(g)$ è la chiusura del prodotto tensore $-\frac{d^2}{dx_3^2} \otimes I + I(-\Delta + g(x_1^2 + x_2^2))$ e dal teorema di Ichinose ([2], XIII.10) sullo spettro del prodotto tensore di operatori strettamente settoriali.

L'operatore dell'effetto Zeeman e le sue proprietà spettrali sono determinati dall'affermazione seguente:

Teorema 3.3. Sia $|\arg g| < \pi$, e $H(g)$: $¢ \setminus \mathbb{R}_- \to L(L^2)$ definita da $H(g) = H_0(g) + V$, $D(H(g)) = D(H_0(g))$, con $H(o) = H_0 + V = T$. Allora:

(1) $H(g)$ è olomorfa (di tipo A), $H(g)^* = H(\overline{g})$, inferiormente limitata se $g \in R$.

(2) $\sigma_{ess}(H(g)) = \sigma_{ess}(H_0(g))$; se $g \in R$, $\sigma_{sc}(H(g)) = \emptyset$.

Dimostrazione. V è compatto da H^2 in L^2, e pertanto, a maggior ragione da $D(H_0(g)) \subset H^2$ in L^2; inoltre è limitato da $H_{H_0(g)}$ in L^2, con sup relativo 0. Pertanto (1) segue come nel Teor. 1.1 (che per g reale garantisce anche $H(g) = H(g)^*$ e la semilimitatezza inferiore: si veda Kato (1), p. 287-291) e dal fatto che $H(g)u$: $D(H(g)) \to L^2$ è una funzione olomorfa $\forall g \in ¢$. La (2) è una conseguenza diretta del teorema di Weyl data la compattezza di V da $D(H_0(g))$ in L^2.

Lo spettro discreto σ_d di $T = H(o)$ è stabile per $|g|$ piccolo. Si ha:

<u>Teorema 3.4</u>. Sia $\lambda_0 = \lambda(o)$ un autovalore isolato di $T = H(o)$ di molteplicità $m < +\infty$. Allora, se $|\arg g| < \pi$, λ_0 è stabile nel senso del Teor. 1.2 rispetto a $H(g)$. Se $m - 1$, $\exists\, B > 0$ tale che $\lambda_0(g)$ è olomorfa in $\Omega = \{g: 0 < |g| < B \mid |\arg g| < \pi - \eta, \eta > 0\}$ e continua in $\overline{\Omega}$.

La dimostrazione si basa sul seguente

<u>Lemma 3.5</u>. Sia $V_\eta = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\arg \lambda| < \pi - \eta, \eta > 0\}$. Allora:

(1) $\exists\, a > 0$, $b > 0$, indipendenti da g nei compatti di V_η, tali che:

$$\| -\Delta u+g(x_1^2+x_2^2)u\|^2 + a\|u\|^2 \geq b\, \|-\Delta u\|^2 + |g|^2\, \|(x_1^2+x_2^2)u\|^2 \quad , \ u\in H^2 \cap D(x_1^2+x_2^2). \tag{3.1}$$

(2) Sia $K(g,z) = V\, R(z,H_0(g))$, $g \in V_\eta$, $z \notin W(H_0(g))$, compatto per 3.3. Allora: $\lim_{|g|\to 0} \|K(g,z) - K(o,z)\| = 0$, uniformemente in z nei compatti di $V_z = \{z \in C: \operatorname{dist}(z, V_\eta) > 0\}$.

(3) $R(z,H_0(g))u \to R(z,H_0)u \quad \forall u \in L^2$, uniformemente in (g,z) nei compatti di $V_\eta \times V_z$.

<u>Dimostrazione</u>. (1) E' chiaramente sufficiente provare la (3.1) per $u \in C_0^\infty$. Nel senso delle forme quadratiche su $C_0^\infty \otimes C_0^\infty$ si ha: $[-\Delta+\overline{g}(x_1^2+x_2^2)][-\Delta+g(x_1^2+x_2^2)] = \Delta^2 + |g|^2 (x_1^2+x_2^2)^2 + i\,\mathrm{Im}\, g[-\Delta, (x_1^2+x_2^2)] + {}$ $+ \mathrm{Re}\, g[-\Delta\, x^2 - x^2]\Delta$. La disuguaglianza $(-\beta^{-1}\Delta \pm \beta(x_1^2+x_2^2))^2 \geq 0$ dà, per $\beta = |g|^{1/2}$: $\mathrm{Re}\, g(-\Delta\, x^2 - x^2\, \Delta) \geq -|g^{-1}\,\mathrm{Re}\, g|\, (\Delta^2 + |g|^2\, (x_1^2+x_2^2)^2)$. D'altra parte $i[-\Delta, (x_1^2+x_2^2)] = 2(D_{x_1} x_1 + x_1 D_{x_1} + D_{x_2} x_2 + x_2 D_{x_2})$, e allo stesso modo si ottiene: $i\,\mathrm{Im}\, g[-\Delta,(x_1^2+x_2^2)] \geq -2|g^{-1}\,\mathrm{Im}\, g|(-\Delta+|g|^2(x_1^2+x_2^2))$. Pertanto: $(-\Delta+\overline{g}(x_1^2+x_2^2))(-\Delta+g(x_1^2+x_2^2)) \geq (1-|g^{-1}\,\mathrm{Re}\, g|)\Delta^2 - 2|g^{-1}\,\mathrm{Im}\, g|\, (-\Delta) + {}$ $+ |g|^2(1-|g^{-1}\,\mathrm{Re}\, g|)(x_1^2+x_2^2)^2 - 2|g|^2\, |g^{-1}\,\mathrm{Im}\, g|(x_1^2+x_2^2)$ da cui l'asserto scegliendo $b = (1 - |g^{-1}\,\mathrm{Re}\, g|)$, $a = 2|\mathrm{Im}\, g\, g^{-1}|^2\, (1 - |g^{-1}\,\mathrm{Re}\, g|)^{-1}$.

(3) E' facile vedere che V_η è l'unione su $|\arg g| < \pi - \eta$ di $W(H_0(g))$. Dunque [1, p. 268] $\|R(z, H_0(g))\| \leq \mathrm{dist}(z, V_\eta)^{-1}$. Ora $H_0(g)u \to H_0u$ se $u \in H^2 \cap D(x_1^2 + x_2^2)$, che è un dominio di essenziale autoaggiunzione di H_0, e così l'affermazione segue direttamente da un risultato noto [1, Teor. VIII.1.5].

(2) Per la (3.1) $\exists K > 0$ indipendente da $g \in V_\eta$ tale che $\|(H_0 - z) R(z, (H_0(g))\| < K$, $z \in V_z$, e per (3) $(H_0 - z) R(z, H_0(g))u \to u$ $u \in L^2$ per $|g| \to 0$, $(g,z) \in V_\eta \times V_z$. E' facile vedere che, per $(g,z) \in V_\eta \times V_z$:

$$K(g,z) - K(o,z) \equiv V R(z,H_0) \, [(H_0 - z) R(z, H_0(g)) - I] \tag{3.2}$$

La (2) equivale a $\|K(g,z)^* - K(o,z)^*\| \to 0$, $K(g,z)^*$ essendo ovviamente la chiusura di $R(\bar{z}, H_0(\bar{g}))\, V$ definito su H^2, compatto con $K(g,z)$. Prendendo l'identità aggiunta di (3.2):

$$K(g,z)^* - K(o,z)^* = [R(\bar{z}, H_0(\bar{g}))(H_0 - \bar{z}) - I](V\, R(z, H_0))^* \tag{3.3}$$

Ora l'immagine della sfera unitaria in L^2 attraverso $(V\, R(z, H_0))^*$ è compatta, e $R(z, H_0(\bar{g}))\, (H_0 - \bar{z}) \to I$ in senso forte per $|g| \to 0$, $g \in V_\eta$: tale convergenza forte ha dunque luogo su un compatto, da cui $\|K(g,z)^* - K(o,z)^*\| \to 0$, $\|K(g,z) - K(o,z)\| \to 0$ per $|g| \to 0$ con l'uniformità voluta in z.

<u>Dimostrazione del Teor. 3.4.</u> Poiché $\lambda_0 < 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $\sigma(T) \cap C_\delta = \{\lambda_0\}$, $C_\delta = \{z: |z - \lambda_0| = \delta\}$. Inoltre $d_\delta = \mathrm{dist}(z, V_\eta) > 0$, cioè $C_\delta \subset V_z$. Per $z \in V_z$, $z \notin \bigcup_{|g| \geq 0} \sigma(H(g))$, si ha:

$$R(z,H(g)) = R(z,H_0(g)) + R(z,H_0(g))\, V\, R(z,H_0(g))[1 + V\, R(z,H_0(g))]^{-1}. \tag{3.4}$$

Ora $\sup_{z \in C_\delta} \|R(z,H_0(g))\| \leq d_\delta^{-1}$, e per il Lemma 3.5 (3) $\exists\, \bar{g}(\delta) > 0$ tale che

$[1 + V\,R(z,H_o(g))]^{-1} : L^2 \xleftrightarrow[su]{1-1} L^2$ per $|g| < \overline{g}(\delta)$, $z \in C_\delta$, e $K_1 > 0$ tale che $\sup_{z \in C_\delta} \| 1 + V\,R(z,H_o(g)) \| \leqq K_1$. Pertanto $K_2 > 0$ tale che

$$(3.5) \qquad \sup_{z \in C_\delta} \| R(z, H(g)) \| < K_2, \qquad |g| \leqq \overline{g}(\delta).$$

Osserviamo che, ancora per la (3) del Lemma (3.5):

$\sup_{z \in C_\delta} \| [1 + V\,R(z,H_o(g))]^{-1} - [1 + V\,R(z,H_o)]^{-1} \| \to 0$ per $|g| \to 0$ e, ragionando sempre allo stesso modo:

$$(3.6) \qquad \sup_{z \in C_\delta} \| R(z,H_o(g))VR(z,H_o(g))[1+VR(z,H_o(g))]^{-1} - R(z,H_o)\,VR(z,H_o)[1 + VR(z,H_o)]^{-1} \| \to 0$$

per $|g| \to 0$. Pertanto, per (3.5) possiamo definire:

$$P(g) = (2\pi i)^{-1} \int_{C_\delta} R(z, H_o(g))\, dz\ , \qquad |g| \geqq 0$$

e per il Teor. 3.2, (2) e (3), $(2\pi i)^{-1} \int_{C_\delta} R(z, H_o(g))\, dz = 0$ perché $\sigma(H_o(g)) \cap V_z = \emptyset$ e $C_\delta \subset V_z$. Per (3.6), possiamo concludere che $\lim_{|g| \to 0} \| P(g) - P(o) \| = 0$, e ciò prova l'asserto.

Teorema 3.6. La serie formale delle perturbazioni $\sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n$ di punto iniziale l'autovalore λ_o esiste.

Sia $R_N(g) = \lambda_o(g) - \sum_{n=0}^{N-1} A_n g^n$ il resto N-esimo. Allora $A > 0$ indipendente da g in $|\arg g| \leqq \pi - \eta$, $\eta > 0$, tale che

$$(3.7) \qquad |R_N(g)| \leqq A^N (2N)!\ |g|^N .$$

Dimostrazione (cenno). Sia $\delta = \frac{d}{2}$, d = distanza d'isolamento di

λ_o, C_δ come sopra, e $d_1 = \sup_{z\in C_\delta} \| R_o(z)\ , R_o(z)\| = (T - z)^{-1} = (-\Delta + V - z)^{-1}$. Sia ψ_o l'autovettore di λ_o: $(-\Delta + V)\ \psi_o = \lambda_o\ \psi_o$, $\|\psi_o\| = 1$. E' noto (si veda ad es. [2], XIII.12), che $\exists\ \gamma > 0$ tale che $e^{\gamma|x|}\ \psi_o \in L^2$. Con $\beta > 0$, sia:

$$B(\beta,z) = [e^{\beta|x|}(x_1^2 + x_2^2),\ R_o(z)]\ e^{-\beta|x|}(i\ \gamma^{-1} + (x_1^2 + x_2^2))^{-1} \tag{3.8}$$

Si può vedere facilmente che $\exists\ d_2 > 0$ tale che $\sup_{z\in C_\delta} \|B(\beta,z)\| < d_2$. Inoltre, ovviamente, $\|(x_1^2 + x_2^2)\ e^{-\beta|x|}\|_\infty < \beta^{-2}$. Sia:

$$\psi_{n-k}(z) = e^{k\gamma|x|/n}\ [(x_1^2 + x_2^2)\ R_o(z)]^{n-k}\ \psi_o,\ k = 0,1,\dots,n-1 \tag{3.9}$$

e notiamo l'identità:

$$\psi_{n-k}(z) = R_o(z)(x_1^2+x_2^2)e^{-\gamma|x|/n}\ \psi_{n-k-1} + B(\tfrac{\gamma k}{n},z)(i\gamma^{-1}+x_1^2+x_2^2)^{-1}e^{-\gamma|x|/n}\ \psi_{n-k-1} \tag{3.10}$$

che dà immediatamente, in virtù delle limitazioni precedenti:

$$\sup_{z\in C_\delta} \|\psi_{n-k}(z)\| \leq (d_1(\tfrac{n}{\gamma})^2 + d_2(\tfrac{n+1}{\gamma})^2)\ \|\psi_{n-k-1}\|$$

Poiché $\psi_n(z) = [(x_1^2 + x_2^2)\ R_o(z)]^n\ \psi_o$, avremo:

$$\sup_{z\in C_\delta} \|\psi_n(z)\| \leq (\frac{d_1 + d_2}{\gamma})^n\ (n+1)^{2n}\ \|e^{\gamma|x|}\ \psi_o\| \tag{3.11}$$

Ora, come al 2.12, il resto N-esimo dello sviluppo di $P(g)\ \psi_o$ è:

$$P_N(g)\psi_o = (-g)^N\ (2\pi i)^{-1} \int_{C_\delta} (H(g)-z)^{-1}\ [(x_1^2 + x_2^2)\ R_o(z)]^N\ \psi_o\ dz$$

e pertanto per (3.5) e (3.11) A > 0 tale che

$$\|P_N(g)\psi_o\| \leq \frac{|g|^N}{2\pi}\int_{C_\delta}\|(H(g)-z)^{-1}\|\|\psi_n(z)\||dz| \leq K_2|g|^N A^N (2N)!$$

il che prova il risultato per il ragionamento ormai consueto.

Osservazione. La divergenza come (2n)! dei termini della serie richiede che $\lambda_o(g)$ sia analitica almeno per $|\arg g| < \pi$ e continua al bordo per potere applicare la variante del Teorema di Carleman e avere così l'unicità. Ciò si può ottenere mediante l'analiticità per dilatazione. Poiché essa è la tecnica essenziale nell'effetto Stark mentre quì ha un ruolo marginale, posporremo la dimostrazione dell'unicità al termine del Teor. 4.5.

4. UN CASO INSTABILE: L'EFFETTO STARK

Alle ipotesi del Teor. 3.1 aggiungiamo quella che $\exists\, \alpha > 0$ tale che V sia analitico per dilatazione almeno per $|\mathrm{Im}\,\theta| < \alpha$ secondo la definizione seguente:

Definizione 4.1. $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ si dice analitico per dilatazione per $|\mathrm{Im}\,\theta| < \alpha$ (brevemente: $V \in C_\alpha$) se $V(e^\theta x)$, $\theta \in \mathbb{R}$, è la restrizione a $\theta \in \mathbb{R}$ di una funzione analitica per $|\mathrm{Im}\,\theta| < \alpha$ tale che la moltiplicazione per $V(\theta) \equiv V(e^\theta x)$ definisce una famiglia olomorfa di operatori compatti da H^2 in L^2.

Esempio. Il potenziale di Coulomb è in C_∞: $V(\theta) = -e^{-\theta}|x|^{-1}$.
L'effetto Stark presenta fenomeni sorprendenti. Il primo è:

Lemma 4.2. Sia $g \in \mathbb{C}$, e $\dot{H}_0(g)$ l'operatore in $L^2(\mathbb{R}^3)$ definito da $-\Delta + gx$, su $D(H_0(g)) = H^2 \cap D(x_1)$. Sia $h_0(g)$ l'operatore in $L^2(\mathbb{R})$ definito in maniera analoga. Allora:

(1) Se $g \in R$ $\dot{H}_0(g)$ è simmetrico ed ha una ed una sola estensione autoaggiunta, denotata con $H_0(g)$;
$\sigma(H_0(g)) = \sigma_{ess}(H_0(g)) = \sigma_{ac}(H_0(g)) = \mathbb{R}$, $g \neq 0$.

(2) Se $\mathrm{Im}\, g \neq 0$, $\dot{H}_0(g)$ è chiuso. Lo si denoti ancora con $H_0(g)$. Allora $H_0(g)^* = H_0(\bar{g})$, e $\sigma(H_0(g)) = \emptyset$.

(3) $R(z,H_0(g))$ è fortemente continuo per $\mathrm{Im}\, g \downarrow\uparrow 0$ se $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$ rispettivamente.

Dimostrazione. (1) Per trasformazione di Fourier $F_\perp$ rispetto a (x_2,x_3), $H_0(g)$ è unitariamente equivalente a $h_0(g) + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Sia $F_\|$ la trasformazione unitaria $e^{i g^{-1/3} D_{x_1}^3/3}$ (esplicitamente: la trasformazione di Airy $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i g^{-1/3} \xi^3/3 + i\xi x} \hat{f}(\xi)\, d\xi$, $\hat{f}(\xi)$ la trasformata di Fourier di $f(x)$). Allora $F_\| h_0(g) F_\|^{-1} = x_1$, da cui l'equivalenza unitaria $F_\| F_\perp H_0(g) F_\perp^{-1} F_\|^{-1} = x_1 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, il che prova (1). Notiamo ora che, se $\mathrm{Im}\, g \neq 0$, procedendo come nel Lemma 3.5, $\exists\, a > 0$, $b > 0$ indipendenti da $|g|$, tali che

$$\|\dot{H}_0(g)u\|^2 + a\|u\|^2 \geq b\, \|-\Delta u\|^2 + |g|^2\|x_1 u\|^2 \,, \quad u \in H^2 \cap D(x_1) \tag{4.1}$$

e ciò implica che $H_0(g)$ è chiuso. E' inoltre chiaro che $H_0(g)^* = H_0(\bar{g})$. Ora se $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$, $\psi \in H^2 \cap D(x_1)$ tali che $H_0(g)\,\psi = \lambda\psi$, $H_0(g)\,\phi = (\lambda - g\alpha)\,\phi$ $\forall\, \alpha \in R$, $\phi = \psi(x_1 + \alpha, x_2, x_3)$. Dunque $H_0(g)$ non può avere autovalori isolati: $\sigma(H_0(g)) = \sigma_{ess}(H_0(g))$. D'altra parte $W(H_0(g)) = \{z \in \mathbb{C}: -\pi + \arg g < \arg z < \arg g\} = W(h_0(g))$, e se $\mathrm{dist}(z, h_0(g)) > 0$ $h_0(g) - z$ è invertibile con inverso in $B(L^2)$ (basta scrivere la funzione di Green). Pertanto, per il teorema di Weyl, $z \in \sigma_{ess}(h_0(g))$ se e solo se $\exists\, \{u_n\}$ in $H^2 \cap D(x_1)$, $\|u_n\| = 1$, tale che

$u_n \to 0$ debolmente e $\|[h_0(g) - z]u_n\| \to 0$. Per il Lemma di Enss (si veda la conferenza di F. Nardini in questo Seminario) è possibile scegliere, in questo caso, $\{u_n(x_1)\}$ con supporto fuori da ogni compatto $\forall$ n. Dato che $\mathrm{dist}(z, W(h_0(g)) = \mathrm{dist}(z, \{ \langle u, h_0(g)h\rangle; \|u\| = 1;\ u \in H^2 \cap D(x_1)\}) \leq$ $\leq \mathrm{dist}(z, \langle u_n, h_0(g)u_n\rangle) \leq |\langle u_n, (h_0(g)-z)u_n\rangle| \leq \|(h_0(g)-z)u_n\|$, e $\mathrm{dist}(z, \langle u_n, h_0(g)u_n\rangle) \to +\infty$ se u_n ha supporto fuori da ogni compatto di R, $\sigma_{ess}(h_0(g)) = \emptyset$. Ora, come si vede facilmente da (4.1), $H_0(g)$ è la chiusura di $(-\frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{d^2}{dx_2^2}) \otimes I + I \otimes h_0(g)$. Dunque $\sigma(H_0(g)) \subset \sigma(h_0(g)) + \sigma(\xi_2^2 + \xi_3^2) \Rightarrow \sigma(H_0(g)) = \emptyset$.

(3) Basta naturalmente considerare $\mathrm{Im}\, g \downarrow 0$, $\mathrm{Im}\, z > 0$. Se $\mathrm{Im}\, g > 0$, e $\mathrm{dist}(z, W(H_0(g)) > 0$, $H_0(g) - z$: $D(H_0(g)) \xleftrightarrow[su]{1-1} L^2$, e $\|R(z, H_0(g))\| \leq \mathrm{dist}(z, W(H_0(g))^{-1} < A/\mathrm{Im}\, z$ per $\mathrm{Im}\, g$ sufficientemente piccola e $\mathrm{Im}\, z$ sufficientemente lontana da 0, dove A non dipende da g. D'altra parte $\|(H_0(g) - z)u\|$ è continuo per $\mathrm{Im}\, g \downarrow 0$ $\forall u \in H^2 \cap D(x_1)$ e pertanto il risultato è provato per [1, Teor. VIII.1.5].

Il Lemma che segue è utile per la caratterizzazione completa dell'operatore dell'effetto Stark.

Lemma 4.3. Sia $g \in C$. Allora:

(1) Se $z \notin \sigma(H_0(g))$, $V\,R(z, H_0(g))$: $L^2 \to L^2$ è compatto.

(2) Sia $0 < |\arg g| < \pi$. Allora, se $K(g,z) = V\,R(z, H_0(g))$,

$$\lim_{|g|\to 0} \|K(g,z) - K(o,z)\| = 0$$

uniformemente in $\eta \leq |\arg g| \leq \pi - \eta$, $\eta > 0$, e in z nei compatti di $V_z = \{C \setminus \bigcup_{\eta \leq |\arg g| \leq \pi - \eta} W(H_0(g))\}$.

Dimostrazione (cenno). (1) Basta considerare il caso $g \neq 0$. Se $\mathrm{Im}\, g \neq 0$, $D(H_0(g)) \subset H^2$: V, essendo compatto da H^2 in L^2, lo è a fortiori da $D(H_0(g))$ in L^2. Se $g \in R$, notiamo che $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in L^2$, $V_2 \in L^\infty_\varepsilon$.

Pertanto $\| V_2 R(z, H_0(g)) \| \leq \varepsilon |\mathrm{Im}\, z|^{-1}$ per Im $z \neq 0$ e quindi basta far vedere che $V_1 R(z, H_0(g))$ è compatto, il che è vero perché la conoscenza esplicita del nucleo integrale di $R(z, H_0(g))$ permette di valutare esplicitamente che la norma di Hilbert-Schmidt di $V_1 R(z, H_0(g))$ è finita. L'affermazione (2) si dimostra come nel Lemma 3.5.

Il risultato fondamentale sull'effetto Stark può essere enunciato così:

Teorema 4.4. Sia $g \in \mathbb{C}$, e $H(g)$ definito da $H_0(g) + V = -\Delta + V + gx_1$ su $D(H_0(g)) = H^2 \cap D(x_1)$. Allora:

(1) Se $g \in R$, $H_0(g)$ è (essenzialmente) autoaggiunto. Se $g \neq 0$, $g \in \mathbb{R}$, $\sigma(H(g)) = \sigma_{ess}(H(g)) = \sigma_{ac}(H(g)) = \mathbb{R}$.

(2) Sia Im $g \neq 0$. Allora $H(g)$ è chiuso, $H(g)^* = H(\bar{g})$, e rappresenta per Im $g \gtrless 0$ una coppia di famiglie olomorfe di tipo A con $\sigma_{ess}(H(g)) = \emptyset$.

(3) $\exists\, \Omega \subset C$, aperto connesso, tale che $R(z, H(g))$ è fortemente continuo per Im $g \downarrow 0$ uniformemente in z nei compatti di Ω; risultato speculare per Im $g \uparrow 0$.

(4) Sia λ_0 un autovalore isolato di $H(o) = T = -\Delta + V$ di molteplicità m. Allora λ_0 è stabile per $|g|$ sufficientemente piccolo, $0 < |\arg g| < \pi$. Se $m = 1$, $\exists\, B >$, $\eta > 0$ tali che $\lambda_0(g)$ è olomorfo per $\eta < \arg g < \pi - \eta$, $-\eta > \arg g > -\pi + \eta$, $|g| < B$.

Osservazioni. (1) Le funzioni $\lambda_0(g)$ per Im $g \gtrless 0$ non sono la continuazione analitica l'una dell'altra, ma la loro riflessione: $\overline{\lambda_0(g)} = \lambda_0(\bar{g})$. Le due cose differiscono perché, come vedremo, $\lambda_0(g)$ ha prolungamento analitico non uniforme se g attraversa R.

(2) Si vede che si ha stabilità degli autovalori se g esce da 0 in ogni direzione non reale e instabilità se esce lungo l'asse reale.

Dimostrazione (cenno). (1) Per quanto riguarda $\sigma_{ess}(H(g)) = \mathbb{R}$

e $H(g)^* = H(g)$ l'affermazione segue dal teorema di Weyl e da quello di Rellich-Kato poiché V è compatto da $D(H_0(g))$ a L^2. $\sigma_{sc}(H_0(g)) = \emptyset$ verrà dimostrato più avanti, e $\sigma_p(H_0(g)) = \emptyset$ è provato da Avron-Herbst (si veda [3 , 4 , 5]). Nel caso $V = -|x|^{-1}$, quello di maggior interesse fisico, l'affermazione è stata provata per la prima volta da Titchmarsh (8) con un metodo sul quale torneremo. La (2) è anch'essa una conseguenza diretta del Lemma 4.3 (1), del teorema di Weyl e del fatto che $H_0(g)u$: $\operatorname{Im} g \gtrless 0 \to L^2$ è analitica $\forall\, u \in H^2 \cap D(x_1)$.

(3) E' facile vedere che $\bigcup_{\operatorname{Im} g > 0} W(H(g))$ rimane alla destra della parallela alla retta $\arg z = \arg g$ che passa per b, per qualche $b > -\infty$. Pertanto $\exists\, \Omega$ come sopra e $K > 0$ (indipendente da g e da z nei compatti di Ω) tale che $\| R(z, H(g)) \| < K$. Poiché $H(g)u \to Tu$ per $\operatorname{Im} g \to 0$ $\forall\, u \in H^2 \cap D(x_1)$, il risultato segue da [1, Teor. VIII.5] eseguendo lo stesso ragionamento per $\operatorname{Im} g \uparrow 0$. L'affermazione (4) si dimostra esattamente con lo stesso ragionamento del Teor. 3.5 tenuto conto dei Lemmi 4.2 e 4.3.

Il collegamento fra il complesso e il reale si ottiene mediante il prolungamento analitico della dilatazione unitaria.

Sia ancora $(U(\theta)f)(x) = e^{3\theta/2} f(e^{\theta} x)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, la dilatazione unitaria in L^2. Si ha ovviamente:

$$U(\theta)\, H(g)\, U(\theta)^{-1} = e^{-2\theta} H(g\, e^{3\theta}), \quad H(g\, e^{3\theta}) = H_0(g\, e^{3\theta}) + V(\theta).$$

Per la (2) del Teor. 4.4 $e^{-2\theta} H(g\, e^{3\theta})$ rappresenta una coppia di famiglie olomorfe per $0 < |\arg(g\, e^{3\theta})| < \pi$, g fisso, e per il ragionamento del Lemma 2.10 i loro autovalori non dipendono da θ. Ricordiamo che $\psi \in L^2$ si dice analitico per dilatazione in $\{\theta: |\operatorname{Im} \theta| < \alpha\}$ se $U(\theta)\, \psi$: $|\operatorname{Im} \theta| < \alpha \to L^2$ è olomorfa, e che l'insieme $\{\phi_\alpha\}$ di tali vettori è denso in L^2 $\forall \alpha > 0$. Considerando, senza perdita di generalità, solo il caso $\operatorname{Im} g > 0$, abbiamo:

Teorema 4.5. Sia $0 < \arg(g\, e^{3\theta}) < \pi$, $g \in \mathbb{R}$. Allora:

(1) Tutti gli autovalori $\lambda_i(g)$, $i = 0,1,\ldots$ di $e^{-2\theta}\, H(g\, e^{3\theta})$ hanno parte immaginaria strettamente negativa, e rappresentano risonanze dell'operatore autoaggiunto $H(g)$ nel senso seguente: se (ϕ,ψ) sono vettori analitici per dilatazione per $\alpha > 0$, allora le funzioni $f_{\phi,\psi} = \langle\phi,(H(g)-z)^{-1}\psi\rangle$, a priori olomorfe in $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ ammettono prolungamento meromorfo a tutto $\mathbb{C}$. I poli del prolungamento, quando si fa variare ψ su tutto Φ_α, sono tutti e soli gli autovalori di $e^{-2\theta}\, H(g\, e^{3\theta})$.

(2) $\sigma_{sc}(H(g)) = \emptyset$.

(3) Sia $\lambda_0(g)$ l'autovalore di $H(g)$ di molteplicità 1 olomorfo per $0 < |g| < B$, $\eta < \arg g < \pi - \eta$, tale che $\lim_{g\to 0} \lambda_0(g) = \lambda_0$, (Teorema 4.4 (4)). Allora $\lambda_0(g)$ ammette prolungamento analitico (non uniforme) al settore $0 < |g| < B$, $\frac{3\pi}{2} < \arg g < \frac{3}{2}\pi$, e $\operatorname{Im} \lambda_0(g) < 0$ se $g \in \mathbb{R}$.

(4) La serie delle perturbazioni $\sum_{n=0}^{\infty} A_n g^n$ per $\lambda_0(g)$ esiste, $A_n \in \mathbb{R}\ \forall n$, ha raggio di convergenza nullo, è uno sviluppo asintotico di $\lambda_0(g)$ per $|\arg g| < \frac{3}{2}\pi$, ed è sommabile (Borel) a $\lambda_0(g)$ per $\eta < \arg g < \pi - \eta$, $|g| < B$.

Osservazioni. (1) L'interpretazione che emerge dal teorema è: esiste una funzione $\lambda_0(g)$ che rappresenta un autovalore di $H(g)$ per $0 < \arg g < \pi$, $0 < |g| < B$, ed è ivi olomorfa: essa ammette prolungamento analitico (non uniforme) attraverso l'asse reale fino a $|\arg g| < \frac{3}{2}\pi$, $0 < |g| < B$, e $\lim_{|g|\to 0} \lambda_0(g) = \lambda_0$, $|\arg g| < \frac{3}{2}\pi$. Il limite continuo (di più, analitico) di $\lambda_0(g)$ per $\operatorname{Im} g \downarrow 0$ rappresenta una risonanza del problema, che altro non è che un autovalore di $e^{-2\theta}\, H_0(g\, e^{3\theta})$, $g \in \mathbb{R}$, $0 < \operatorname{Im}\theta < \frac{\pi}{3}$. La serie perturbativa determina univocamente la risonanza tramite la sommabilità e il prolungamento analitico fino a $\arg g = 0$, ed essendo reale sicuramente diverge per $g \in \mathbb{R}$, e quindi ha raggio di convergenza zero.

(2) Il ragionamento che faremo per prolungare analiticamente

$\lambda_0(g)$ si applica pari pari all'effetto Zeeman, e si potrà così concludere che in quel caso $\lambda_0(g)$ è prolungabile fino a $|\arg g| < 2\pi - \eta$, $0 < |g| < B$, con la stima del resto ivi valida uniformemente il che garantisce la sommabilità di Borel per $|g| < B$, $|\arg g| < \pi - \eta$.

Dimostrazione (cenno). La chiave di volta è costituita dalla prova della seguente identità: sia $g \in \mathbb{R}$, $0 < \mathrm{Im}\,\theta < \frac{\pi}{3}$. Allora:

$$f_{\psi,\psi} = \langle \phi, (H-z)^{-1}\psi\rangle \equiv \langle \phi(\bar{\theta}), [e^{-2\theta} H(g\,e^{3\theta}) - z]^{-1}\,\psi(\theta)\rangle \tag{4.3}$$

dove $\phi(\theta) = U(\theta)\phi$, $\psi(\theta) = U(\theta)\psi$. Infatti il 2° membro di (4.3) non dipende da θ perché, ricordiamolo, $U(\theta + \theta_0)\psi = U(\theta)\,U(\theta_0)\psi$ e $U(\theta_0)$ è unitaria per $\theta_0 \in R$: pertanto il 2° membro di (4.3), che è olomorfo in θ, dipende solo da $\mathrm{Im}\,\theta$ ed è così costante. Inoltre esso è fortemente continuo quando $\mathrm{Im}\,\theta \downarrow 0$ per il Teor. 4.4 (3). Esso coinciderà dunque con il suo limite a $\mathrm{Im}\,\theta = 0$, che vale $f_{\psi,\psi}(z)$ per equivalenza unitaria. Poiché $\sigma_{ess}(e^{-2\theta}H(g\,e^{3\theta})) = \emptyset$ (Teor. 4.4 (2)) il 2° membro di (4.3) rappresenta esplicitamente il prolungamento meromorfo di $f_{\psi,\psi}$ a tutto $\mathbb{C}$. Dato che Φ_α è denso in L^2, $H(g)|_{g\in\mathbb{R}}$ è autoaggiunto, e $\sigma_p(H(g)|_{g\in\mathbb{R}}) = \emptyset$, gli autovalori di $e^{-2\theta}H(g\,e^{3\theta})$ sono tutti e soli i poli del prolungamento e hanno parte immaginaria strettamente negativa. Ciò prova (1). La (2) segue dalla (4.3) e dall'analoga valida per $-\frac{\pi}{3} < \mathrm{Im}\,\theta < 0$: infatti esse implicano che $f_{\psi,\psi}(z)$ ha valori al bordo continui per $\mathrm{Im}\,z \downarrow\uparrow 0$. Poiché $\{\Phi_\alpha\}$ è denso in L^2 ciò basta (si veda Reed-Simon, XIII.7) a provare che $\sigma_{sc}(H(g)) = \emptyset$. Tenuto poi conto del Teor. 4.4 (4), la (3) segue dal fatto che gli autovalori di $e^{-2\theta}H(g\,e^{3\theta})$ non dipendono da e pertanto coincidono con quelli di $H(g)$ quando $\eta < \arg g < \pi - \eta$, $\theta \in R$. L'affermazione (4) si prova esattamente come la (3) del Teor. 3.4, ragionando s'intende su $e^{-2\theta}H(g\,e^{3\theta})$, $0 < \arg(g\,e^{3\theta}) < \pi$ e applicando il teorema di Watson-Nevanlinna, con la sola modifica che ora $A_n = O(n!)$ poiché $\|x_1\,e^{-\beta|x|}\|_\infty < \frac{A}{\beta}$. Ciò conclude il cenno di prova.

<u>Osservazione</u>. Nel caso $V = -|x|^{-1}$, l'effetto Stark propriamente detto, si può dire molto di più sfruttando la parziale separabilità del problema. Senza dilungarci nei dettagli (si veda ad esempio [5]) notiamo che il cambiamento di variabili $(x_1,x_2,x_3) \longleftrightarrow (u,v,\phi)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ x_2 = u\,v\cos\phi \qquad\qquad 0 \leq u,\ v \leq +\infty\ , \quad 0 \leq \phi < 2\pi \\ x_3 = u\,v\sin\phi \end{cases}$$

trasforma l'equazione di Schrödinger $(-\Delta - |x|^{-1} + g\,x_1)\,\psi = E\,\psi$ in

$$\left(-\frac{d^2}{du^2} - \frac{d^2}{dv^2} + \left(-\frac{d^2}{d\phi^2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}\right) - E(u^2+v^2) + g(u^4 - v^4) - 1\right)\Phi(u,v,\phi) = 0$$

avendo posto $\Phi = (u\,v)^{-1/2}\,\psi$. Assumendo $\Phi(u,v,\phi)$ della forma $\chi(u)\,\omega(v)\,e^{\pm im\phi}$, $m = 0,1,\ldots$, l'equazione di Schrödinger è formalmente equivalente a:

$$(4.5) \qquad \begin{aligned} &\left(-\frac{d^2}{du^2} + (m^2 - 1/4)\,u^{-2} - E\,u^2 + g\,u^4\right)\chi = \lambda_1\,\chi \\ &\left(-\frac{d^2}{dv^2} + (m^2 - 1/4)\,v^{-2} - E\,v^2 - g\,u^4\right)\omega = \lambda_2\,\omega \end{aligned}$$

dove lo spettro è definito implicitamente dai valori di E tali che $\lambda_1(E,g) + \lambda_2(E,g) = 1$. Il punto qui è che le equazioni separate sono equivalenti a quella di Schrödinger solo per g complesso, nel qual caso la 2ª delle (4.5) va definita come il prolungamento della prima a $g\,e^{i\pi}$ mediante la tecnica del 2.10.

Pertanto si può impostare il problema dalle (4.5) e, usando i risultati del n. 2, non solo riottenere i risultati precedenti (che, anzi, sono stati dimostrati prima per questa via) ma anche ottenere stime quantitative. Ricorderò, fra le molte, la formula di Oppenheimer che dà l'andamento asintotico di $\mathrm{Im}\,\lambda_0(g)$ per $g \in \mathbb{R} \downarrow 0$:

$$\mathrm{Im}\,\lambda_0(g) = g^{-2/3}\,e^{-2/3g}\,(1 + o(g)).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] T. KATO: Perturbation Theory of Linear Operators, Springer 1966.

[2] M. REED e B. SIMON: Methods of Modern Mathematical Physics, Voll. II-IV, Academic Press 1976, 1978.

[3] W. HUNZIKER: Schrödinger operators with electric and magnetic fields, Lecture Notes in Physics, Vol. 100, Springer 1980.

[4] I. HERBST, Schrödinger Operators with External Homogeneous Fields, NATO Advanced Studies Institute vol. 72 B, 1982 (G.Velo e A. Wightman, Editors).

[5] S. GRAFFI, Operatori di Schrödinger con campi elettrici, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano vol. 50, 1980.

[6] G. FANO, Metodi Matematici della Meccanica Quantistica, Zanichelli, Bologna 1969.

[7] L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ, Meccanica Quantistica, Editori Riuniti, Roma 1976.

[8] E.C. TITCHMARSH, "Eigenfunction Expansions", Vol. II, Cambridge University Press 1958.

[9] B. SIMON, "Coupling constant Analyticity for the Anharmonic Oscillation", Ann. Phys. 58, 79-130 (1970).